Dr Oliver Mathematics
General Product Rule

1 General Product Rule

If $\mathrm{f}_1(x)$, $\mathrm{f}_2(x)$, $\mathrm{f}_{n-1}(x)$, and $\mathrm{f}_n(x)$ are differentiable functions, then the product $(\mathrm{f}_1\,\mathrm{f}_2 \ldots \mathrm{f}_{n-1}\,\mathrm{f}_n)'(x)$ is a differentiable and the first derivative is given by

$$\begin{aligned}(\mathrm{f}_1\,\mathrm{f}_2 \ldots \mathrm{f}_{n-1}\,\mathrm{f}_n)'(x) = {} & [\mathrm{f}_1'(x)\,\mathrm{f}_2(x) \ldots \mathrm{f}_{n-1}(x)\,\mathrm{f}_n(x)] + [\mathrm{f}_1(x)\,\mathrm{f}_2'(x) \ldots \mathrm{f}_{n-1}(x)\,\mathrm{f}_n(x)] \\ & \ldots + [\mathrm{f}_1(x)\,\mathrm{f}_2(x) \ldots \mathrm{f}_{n-1}'(x)\,\mathrm{f}_n(x)] + [\mathrm{f}_1(x)\,\mathrm{f}_2(x) \ldots \mathrm{f}_{n-1}(x)\,\mathrm{f}_n'(x)].\end{aligned}$$

2 Examples

1. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3 \cdot \mathrm{e}^{2x} \cdot \sin 3x)$.

Solution

It helps to draw a table.

Each term	Derivative	Remaining terms
x^3	$3x^2$	$\mathrm{e}^{2x} \cdot \sin 3x$
e^{2x}	$2\mathrm{e}^{2x}$	$x^3 \cdot \sin 3x$
$\sin 3x$	$3\cos 3x$	$x^3 \cdot \mathrm{e}^{2x}$

Finally,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3 \cdot \mathrm{e}^{2x} \cdot \sin 3x) &= (3x^2)(\mathrm{e}^{2x} \cdot \sin 3x) + (2\mathrm{e}^{2x})(x^3 \cdot \sin 3x) + (3\cos 3x)(x^3 \cdot \mathrm{e}^{2x}) \\ &= 3x^2 \cdot \mathrm{e}^{2x} \cdot \sin 3x + 2x^3 \cdot \mathrm{e}^{2x} \cdot \sin 3x + 3x^3 \cdot \mathrm{e}^{2x} \cdot \cos 3x \\ &= \underline{\underline{x^2 \cdot \mathrm{e}^{2x}(3\sin 3x + 2x\sin 3x + 3x\cos 3x)}}.\end{aligned}$$

2. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x \cdot \ln x \cdot \mathrm{e}^{-x} \cdot \tan 2x)$.

Solution

Each term	Derivative	Remaining terms
x	1	$\ln x \cdot \mathrm{e}^{-x} \cdot \tan 2x$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$x \cdot \mathrm{e}^{-x} \cdot \tan 2x$
e^{-x}	$-\mathrm{e}^{-x}$	$x \cdot \ln x \cdot \tan 2x$
$\tan 2x$	$2\sec^2 2x$	$x \cdot \ln x \cdot \mathrm{e}^{-x}$

Finally,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x \cdot \ln x \cdot \mathrm{e}^{-x} \cdot \tan 2x) &= (1)(\ln x \cdot \mathrm{e}^{-x} \cdot \tan 2x) + \left(\frac{1}{x}\right)(x \cdot \mathrm{e}^{-x} \cdot \tan 2x) \\ &\quad + (-\mathrm{e}^{-x})(x \cdot \ln x \cdot \tan 2x) + (2\sec^2 2x)(x \cdot \ln x \cdot \mathrm{e}^{-x}) \\ &= \underline{\underline{\ln x \cdot \mathrm{e}^{-x} \cdot \tan 2x + \mathrm{e}^{-x} \cdot \tan 2x}} \\ &\quad \underline{\underline{- x \cdot \ln x \cdot \mathrm{e}^{-x} \cdot \tan 2x + 2x \cdot \ln x \cdot \mathrm{e}^{-x} \cdot \sec^2 2x}}.\end{aligned}$$